

Pracovní list VL 03 – Implikace a Ekvivalence

Definice: Implikace libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením slovním obratem **jestliže, pak**.
 Píšeme $a \Rightarrow b$ a čteme: *jestliže a, pak b*. Výroku a se říká předpoklad, výroku b závěr.

Příklad 1: Rozeberte všechny možnosti, které mohou nastat u výroku „Jestliže vyhraju ve sportce, koupím manželce kožich“ a zkuste u každé rozhodnout, zda autor výroku lhal nebo ne.

1. Vyhrál, koupil kožich Ihal: ANO / NE
2. Vyhrál, nekoupil Ihal: ANO / NE
3. Nevyhrál, koupil..... Ihal: ANO / NE
4. Nevyhrál, nekoupil Ihal: ANO / NE

Tabulka pravdivosti

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Příklad 2: Podle výsledků příkladu 1 zkus vyplnit tabulku pravdivosti pro implikaci.

Příklad 3: Urči pravdivost výroku:

Jestliže má pan učitel brýle, pak je tabule oranžová. Jestliže je tabule oranžová, pak má pan učitel brýle.

Je-li číslo dělitelné šesti, je dělitelné i třemi. Je-li číslo dělitelné třemi, je dělitelné i šesti.

Pozor: u implikace záleží / nezáleží na pořadí výroků!

Příklad 4: Rozhodni o pravdivosti výroku: Jestliže je pan učitel mistr světa v karate, pak má naše škola zelenou fasádu.

Co je na výsledku zajímavého?

Příklad 5: Rozhodni o pravdivosti výroků:

Jestliže je Země kulatá, pak obíhá kolem Slunce.

Jestliže je Země plochá, pak je kulatá.

Jestliže je Země kulatá, pak je plochá.

Jestliže je Země plochá, pak se dá srolovat do igelitky.

Příklad 6: Pomocí tabulky urči, kdy jsou pravdivé výroky: $(a \wedge b) \Rightarrow a$ $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$ $(a \Rightarrow \neg a) \vee (\neg a \Rightarrow a)$

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \Rightarrow a$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

a	b			
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

a				
1				
0				

Co je na výsledcích zajímavého

Definice: Tautologie je výrok, který je pravdivý vždy, bez ohledu na pravdivostní hodnotu jednotlivých částí výroku

Příklad 7: Zjistěte, zda je následující výrok tautologie:

$$((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z)$$

$$((x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg x \wedge y)) \vee \neg y$$

Příklad 8: Z výroků a : "Číslo je dělitelné devíti.", b : "Ciferný součet čísla je dělitelný třemi.", sestav implikace: $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$, $\neg b \Rightarrow \neg a$, $\neg a \Rightarrow \neg b$. Které z nich jsou pravdivé? Pravdivé implikace podtrhni zeleně. Je výsledek v souladu s poznámkou za příkladem 3?

Definice: Obměněná implikace k implikaci $a \Rightarrow b$ je implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$ a má pravdivostní hodnotu.
 Obrácená implikace k implikaci $a \Rightarrow b$ je implikace $b \Rightarrow a$ a má pravdivostní hodnotu.

Příklad 9: Vytvoř obrácenou a obměněnou implikaci k výroku: Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak pro jeho strany platí pythagorova věta.

Obrácená implikace:

Obměněná implikace:

Příklad 10: Zformuluj obměněné implikace k výrokům:

Jestliže je číslo x dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.

Pokud je číslo x větší než 10, je kladné.

Jestli to stihnu, tak přijdu.

Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.

Příklad 11: Ekvivalence libovolných výroků a, b (značíme ji $a \Leftrightarrow b$) je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$. Zapiš tento výrok pomocí formule a doplň její tabulku pravdivostních hodnot.

a	b			

Tabulka pravdivosti

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Definice: Ekvivalence libovolných výroků a, b je konjunkce implikace a obrácené implikace. Značíme ji $a \Leftrightarrow b$ a čteme (**a je ekvivalentní s b** nebo **a platí právě tehdy, když platí b**). Ekvivalence je pravdivá pouze tehdy, když

Příklad 12: Rozhodněte o pravdivosti výroků:

6 je sudé číslo, právě tehdy, když 7 je liché číslo.

V Žamberku je gymnázium právě tehdy, když je tam kostel.

Facebook je největší sociální síť právě tehdy, když google je nejpoužívanější vyhledávač.

Tabule je bílá právě tehdy, když není zelená.

Číslo x je dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 2 a 4

Letohradem protéká Vltava je ekvivalentní s tím, že Brnem protéká Dunaj

Příklad 13: Ukažte, že následující výroky jsou tautologie:

$$\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$$

Příklad 14: Určete pravdivostní hodnotu složených výroků :

Honza je student. (pravdivý) Honza bydlí v Brně. (pravdivý) Honza je vegetarián. (nepravdivý)

Honza nemá kočku. (nepravdivý) Honza hraje fotbal. (nepravdivý)

Honza je student a hraje fotbal.

Honza bydlí v Brně a není vegetarián.

Honza je student nebo vegetarián.

Honza nemá kočku a nehraje fotbal.

Honza není student nebo nemá kočku.

Jestli je Honza vegetarián, pak hraje fotbal.

Jestli má Honza kočku, pak nebydlí v Brně.

Honza není student ani vegetarián.

Honza nemá kočku nebo je student a vegetarián.

Jestli Honza nehraje fotbal, tak je student i vegetarián.

Jestli Honza hraje fotbal, pak je vegetarián a má kočku